Bernoulli Süreci

Tanım 2.1.1. $\{X_n, n \geq 1\}$ aşağıdaki koşullarsa buna Bernoulli süreci denir.

a. X_1,X_2,...,X_n ler bağımsızdır.

b. $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = 0) = q = 1 - p$; $\forall\, n$ için

Ö**rnek 2. 1** $\{ X_n, n \geq 1\}$ Bernoulli süreci kesikli parametreli, kesikli durum uzaylı bir süreçtir. Durum uzayı $E = \{ 0, 1 \}$ ve indis kümesi $T = \{ 1, 2, 3, \dots \}$.

Bir madeni paranın havaya atılmasıyla Bernoulli sürecinin bir örneklem dizisi elde edilebilir.

n :	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Paranın yüzü :	Y	T	T	Y	Y	Y	T	Y	...
X_n :	1	0	0	1	1	1	0	1	...

Örnek 2.2 Başarı olasılığı p olan bağımsız Bernoulli denemeleri yapılıyor. S_n n denemedeki başarılı sonuçların sayısını göstersin $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ve X_k da $k -$ ıncı denemedeki başarı sonucu olsun.

$$X_k = \begin{cases} 0 & : q = 1 - p \\ 1 & : p \end{cases}$$

a) $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0,1, \dots, n$ olduğunu gösteriniz.

b) $\{S_n , n \geq 1\}$ sürecinin bağımsız artımlı olduğunu gösteriniz.

c) $P(S_5$=4, S_{10}=7/S_3=2) olasılığını bulunuz.

d) S_n' in varyans ve kovaryansını bulunuz.

Çözüm.

a) $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

Moment çıkaran fonksiyon fonksiyon yöntemini kullanarak

$$M_{S_n}(t) = E(e^{t\,S_n}) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n})$$

X_i ‘ ler bağımsız olduğundan,

$$M_{S_n}(t) = E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) = E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) \quad (1)$$

Bernoulli tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) = (pe^t + q)$$

Olacağından (1) eşitliğini

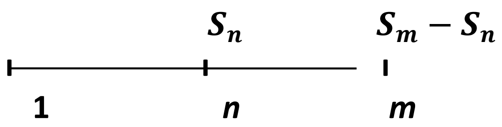
$$M_{S_n}(t) = (pe^t + q)^n \qquad (2)$$

şeklinde bulabiliriz. Teklik teoremine göre her bir olasılık (yoğunluk) fonksiyonunu bir moment çıkaran fonksiyona sahiptir. Dolayısıyla bu moment çıkaran fonksiyon da binom tesadüfi değişkeninin moment çıkaran fonksiyonudur. Böylece $S_n \sim B(n,p)$ olur, yani

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ , \ k = 0,1,\dots,n$$

olduğu görülür.

b) $m > n$ alalım. Süreç kesikli olduğundan $S_m - S_n$ farkı $S_1,\ S_2, \dots,\ S_n$ ler le bağımsızdır.



A ve B bağımsız ise $P(A/B)$= $P(A)$, $P(B) \neq 0$

$$P(\,S_m - S_n / S_1, S_2, \dots, S_n) =$$

$$= P(X_1 + X_2 + \dots + X_m - X_1 + X_2 + \dots + X_n = k /\ S_1,\ S_2, \dots,\ S_n)$$

$$= P(X_{n+1} + X_{n+2} + \dots + X_m = k\ / X_1, X_1 + X_2, \dots, X_1 + \dots + X_n)$$

$$= P(\,S_m - S_n = k).$$

c) $P(S_5$=4, S_{10}=7/S_3=2) = $\frac{P(S_3=2, S_5=4, S_{10}=7)}{P(S_3=2)}$

$$= \frac{P(S_3=2)P\ S_2=2)P(S_5=3)}{P(S_3=2)}$$

$$= 10p^5q^2.$$

d) $E(S_n) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
$= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
= np.

$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$

$= V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$

$= npq.$

$k < r$ için $Cov(X_k, X_r) = \min(k,r)\, pq$

$= kpq.$

$$Cov(S_k, S_r) = E(S_k S_r) - E(S_k)E(S_r)$$

$$= E(S_k\,(\,S_r - S_k\,) + S_k^2) - E(S_k)E(S_r)$$

a) da B.A.S. olduğundan,

$$Cov(S_k, S_r) = E(S_k^2) - E(S_k)E(S_k)$$

$$= V(S_k)$$

$$= kpq.$$

Örnek 2.3. $S_n \sim B(\,n, p)$ olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin doğru olduğunu gösteriniz.

a) $E(S_{n+k}/S_k = i) = i + np\,;\ \ n, k = 1,2, \ldots \qquad 0 \le i \le k$
b) $E(S_7 S_{10}/S_5 = 3) = 8p^2 + 23p + q$

Çözüm a) $S_{n+k} - S_k$ farkı $S_k{}'$ dan bağımsızdır ve S_n ile aynı dağılımlıdır, buna göre

$$E(S_k + S_{n+k} - S_k/S_k = i) = i + E(S_{n+k} - S_k/S_k = i)$$

$$= i + E(S_{n+k} - S_k) = i + E(S_n)$$

$$= i + np\ .$$

Mesela, $E(S_8/S_5 = 3) = 3 + 3p$ olur.

$S_{n+k} - S_k \sim S_n$ olduğu dikkate alınırsa

$$E(S_7 S_{10}/S_5 = 3) = E[(S_7 - S_5 + 3)(S_{10} - S_5 + 3)/S_5 = 3]$$

$$= E(S_2 + 3)(S_5 + 3) = E(S_2 S_5) + 21p + 3$$

$$E(S_2 S_5) = ES_2(S_5 - S_2) + E(S_2^2) = 2p3p + 2p^2 + 2p = 8p^2 + 2p$$

Bu ifade önceki eşitlikte yerine konulursa istenen ifade elde edilir.

2.2. Wiener Süreci

$\{ X_t, t \geq 0 \}$ bir süreç ve $T = [0, \infty)$. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu sürece Wiener süreci denir.

a) $X_0 \cong 0$

b) $\forall\ t\ için\ E(X_t) = 0, Var(X_t) = \sigma^2 t$

c) Bu süreç durağan bağımsız artımlıdır.

d) X_t normal dağılmıştır. $X_t - X_s$ artımı ($t > s$ için) normal dağılmıştır.

2.3. Yenileme (Renewal) Süreci.

Stokastik sürecin büyük bir sınıfı yenileme süreçleridir. Süreçlerin bu sınıfı bağımsız ve aynı dağılımlı olayları modellemek için kullanılır.

Tanım 2.3.1. T_1 , T_2 , … , T_n ‘ ler bağımsız aynı dağılımlı ve pozitif stokastik süreçler olsun. t_n= T_1+ T_2 + … + T_n = $\sum_{i=1}^{n} T_i$ ve

$X_t = max\,\{n: t_n \leq t\}$, T_n = $t_n - t_{n-1}$ olmak üzere $\{X_t,\ t \geq 0\}$ süreci yenileme süreci olarak adlandırılır. t_n ‘e n. sıçrayış anı $[t_{n-1}, t_n]$ aralığına ise yenileme aralıkları denilir.

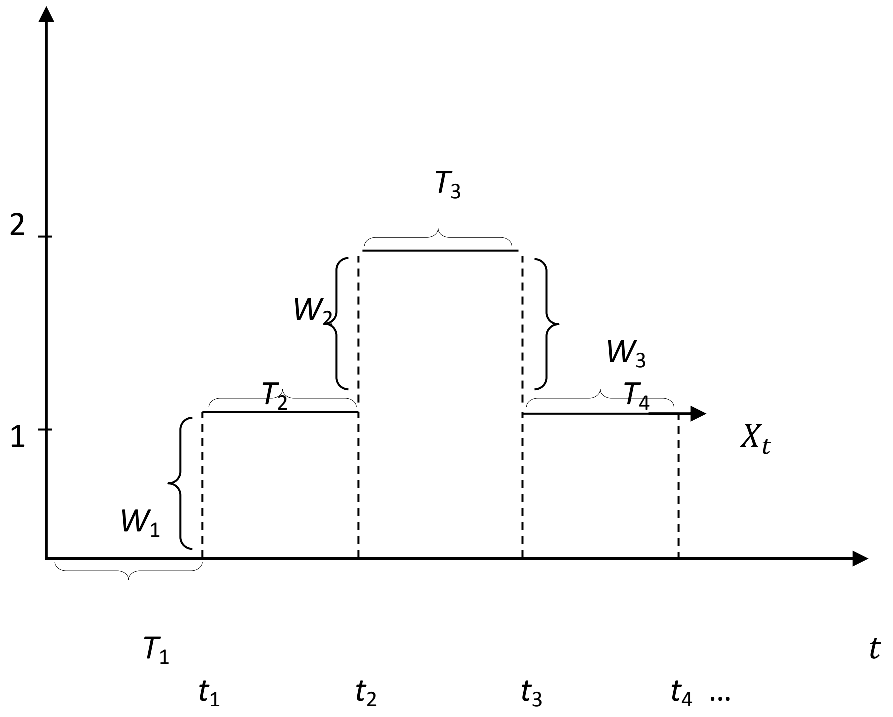
Gelişler arası süreler üstel dağıldığında Poisson süreci yenileme sürecinin özel bir durumu olur.

2.3.1. Ödüllü Yenileme Süreci

Tanım. $W_1, W_2, \dots$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip ve $E(W_i) < \infty$ olmasını sağlayan ödüllü rastlantı değişkenleri olsun. O halde

$$Y_T = \sum_{i=1}^{X_t} W_i$$

ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılır. Burada T_i ’lerin aksine W_i’ ler pozitif değerlerin yanı sıra negatif değerlerde alabilir

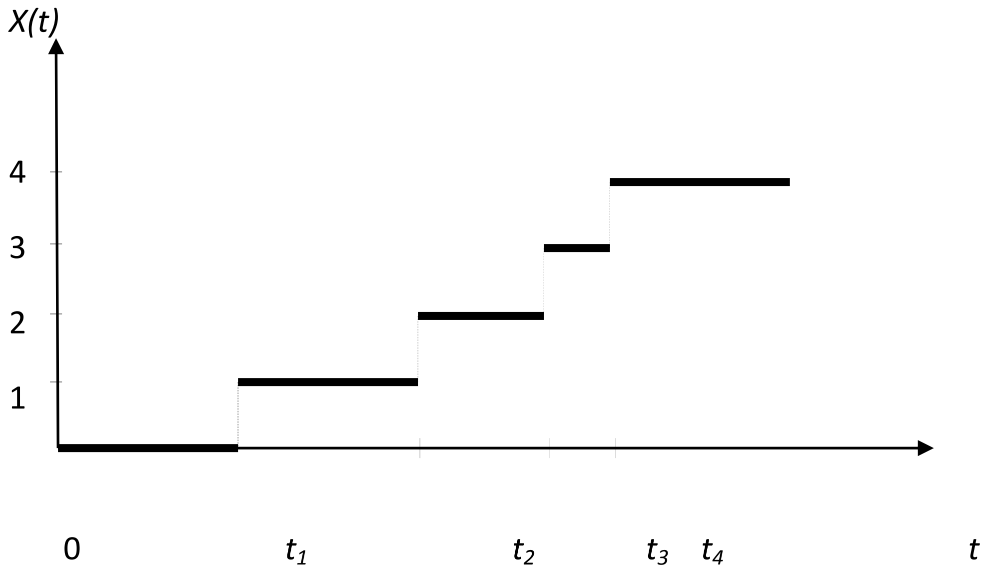


Şekil. 2.3.1 Yenileme ve ödüllü yenileme süreci

2.4. Sayma (Counting) Süreci

Tanım: $\{X_t\, , t \geq 0\}$ tesadüfi süreci $(0, t)$ aralığında meydana gelmiş olan olayların toplam sayısını temsil ederse (gösterirse) bu sürece sayma süreci denir. Bu tanımdan sayma süreci X_{t} aşağıdaki koşulları sağlar.

1. $X_{\mathrm{t}} \geq 0$ ve $X_0 = 0$
2. X_{t} tamsayı değerlidir.
3. $s < t$ ise $X_s \leq X_t$
4. (s, t) aralığında meydana gelen olayların sayısı $X_t - X_s$ ye eşittir.



Şekil 2.4.1. Sayma sürecinin örneklem fonksiyonu